Занятие№13 пр.№7

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СОСТАВ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

Содержание отчёта.

1. Изучить основные теоретические сведения по анализу спектра электрических сигналов.
2. Выполните задание по спектрам гармонических сигналов.
3. Отчёт должен содержать осциллограммы сигналов и расчёты по своему варианту.
4. Графики спектров импульсов и амплитудно-модулированных сигналов.
5. Выводы.
6. Ответы на **Контрольные вопросы:**

1. Что такое амплитудно-частотный спектр колебаний?
2. Что такое фазочастотный спектр колебаний?
3. Как определяют амплитуды спектральных составляющих спектра?
4. Как может быть описан детерминированный сигнал?
5. Какая связь существует между спектрами периодических и непериодических сигналов?
6. В чем отличие спектров периодических и непериодических сигналов?
7. Как определяется ширина спектра и длительность сигнала?
8. Дать определение скважности периодической последовательности прямоугольных импульсов.

Оценка:

5баллов-отчёт с расчётами+8 вопросов с ответами

4балла-отчёт с расчётами+6 вопроса с ответами

3балла-отчёт с расчётами+4 вопроса с ответами

Домашнее задание

1. Что такое обобщенный ряд Фурье? Каковы достоинства разложения сигналов по системе ортогональных функций?
2. Что представляет собой система ортогональных функций и ее свойства?
3. Что представляет собой спектральная плотность сигнала?
4. Сформулируйте теорему Парсеваля. О чем говорит равенство Парсеваля?
5. Для каких целей используются теоремы о спектрах? Перечислите свойства преобразования Фурье.

Теоретические сведения

При воздействии на радиоэлектронное устройство (фильтр, усилитель, линию задержки и др.) синусоидального тока или напряжения результат воздействия, т. е. закон изменения электрической величины на выходе устройства, можно определить с помощью комплексного метода решения уравнений Кирхгофа. Импульс и последовательность импульсов не являются синусоидальными электрическими колебаниями. Однако известно, что любое несинусоидальное периодическое колебание $u(t)$ можно разложить в бесконечный тригонометрический ряд (ряд Фурье), состоящий из постоянной и синусоидальных составляющих (гармоник), имеющих различные амплитуды, частоты и фазы. Такую совокупность гармоник называют спектром. При этом различают спектр амплитуд и спектр фаз.

Спектр амплитуд периодической последовательности прямоугольных импульсов показан на рис. 1 *а.*

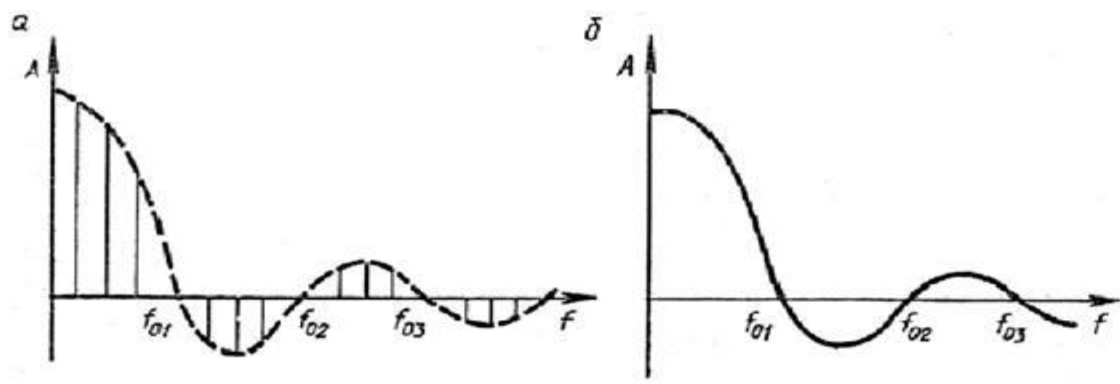


Рис. 1 Частотные спектры периодической последовательности прямоугольных импульсов *(а)* и одиночного прямоугольного импульса *(б)*

Каждая гармоника отображается отдельной линией, длина которой пропорциональна амплитуде этой гармоники, а расположение относительно оси частот определяется ее фазой. Такой спектр называют линейчатым. Огибающая линейчатого спектра амплитуд изменяется по закону sin x/x. Частоты f_{01}, f_{02}, … зависят от длительности импульсов и определяются выражением $f_{0m} = m/t_и$(m = 1, 2, 3, ...). Число гармоник, заключенных между частотами 0, f_{01}, f_{02}, … равно скважности импульсов. Поэтому при увеличении периода повторения T амплитудный спектр становится более «густым», а при $T\to\infty$ превращается в сплошной (рис. 1, *б*).

Спектром фаз, или *фазочастотным спектром,* называют совокупность фаз гармонических составляющих. С учетом начальных фаз амплитуды гармоник могут быть как положительными, так и отрицательными, что и учтено на рис. 9.5, *а.* В ряде случаев интересуются лишь амплитудным (амплитудно-частотным) спектром без учета фаз. В таком случае амплитудно-частотный спектр (рис. 9.5, *а*) будет выглядеть так, как показано на рис. 9.6.

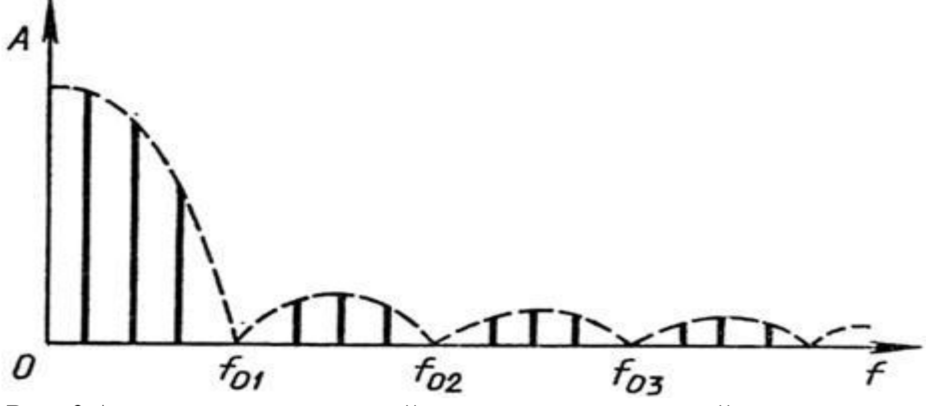


Рис. 2 Амплитудно-частотный спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

Чтобы форма выходных импульсов при прохождении через электрическую цепь (или устройство) не отличалась от формы входных импульсов, необходимо, чтобы эта цепь пропускала все гармоники, сохраняя их начальные фазы. Количество гармоник, пропускаемых электрической цепью (или устройством), определяет ее полосу пропускания ΔF. Следовательно, в идеальном случае полоса пропускания должна быть бесконечно большой. Рассматривая рис. 2, можно заметить, что гармоники с наибольшими амплитудами сосредоточены в полосе частот 0...f_{01}. Поэтому форма импульсов в наибольшей степени определяется гармониками именно этого диапазона. Для пропускания этих гармоник полоса пропускания электрической цепи (устройства) должна быть равной $\Delta F = f_{01} = 1/t_и$. Для повышения крутизны фронта и среза импульсов полосу пропускания увеличивают до значения $\Delta F = (2…3)/t_и$

Приложение: 1.3 Ортогональные системы функций

Две функции $\varphi(x)\in L_2[a;b]$ и $\psi(x)\in L_2[a;b]$ называются *ортогональными* на отрезке $[a;b]$, если их скалярное произведение на $[a;b]$ равно нулю:

$$(\varphi,\psi)=\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx=0.$$

Система функций

$$(\varphi_n(x))=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x),\dots)$$

(конечная или бесконечная) называется *ортогональной* на отрезке $[a;b]$, если все функции этой системы попарно ортогональны на этом отрезке, т. е.

$(\varphi_m,\varphi_n)=0$, $\forall m\neq n$, $m,n\in\mathbb{N}$.

Ортогональная система функций ($\varphi_n(x)$) на отрезке $[a;b]$ называется *ортонормированной*, если

$$\|\varphi_n\|^2=(\varphi_n,\varphi_n)=\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx=1 \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Любую ортогональную на $[a;b]$ систему функций ($\varphi_n(x)$) с $\|\varphi_n\|\neq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ можно нормировать. Для этого достаточно разделить каждую функцию системы ($\varphi_n(x)$) на ее норму. В результате получим ортонормированную систему функций $\left(\frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|}\right)$.

Основной тригонометрической системой функций на отрезке $[-l;l]$ называется система

$$\left(1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},\dots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\dots\right).$$

Основная тригонометрическая система функций является ортогональной на любом отрезке длиной $2l$.

Ряды Фурье в гильбертовых пространствах

2.1 Экстремальное свойство коэффициентов Фурье.

2.2 Неравенство Бесселя.

2.3 Сходимость рядов Фурье.

2.4 Равенство Парсеваля.

2.1 Экстремальное свойство коэффициентов Фурье

При изучении возможности представления функции рядом Тейлора в точке предполагалось, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности этой точки. Представление же функций рядами Фурье допускает более широкий класс кусочно-непрерывных функций.

Пусть ($\varphi_n(x)$) – ортогональная система функций в $L_2[a;b]$.

Выражение

$$c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\dots+c_n\varphi_n(x)+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x).$$

называется *обобщенным рядом Фурье по ортогональной системе функций* ($\varphi_n(x)$). Если ($\varphi_n(x)$) – основная тригонометрическая система функций, то ряд называется *тригонометрическим рядом Фурье*.

Метрикой ρ *(расстоянием)* в пространстве $L_2[a;b]$ называется величина

$$\rho(f,\varphi)=\sqrt{\int_a^b (f(x)-\varphi(x))^2 dx}.$$

Величина $\rho(f,\varphi)$ характеризует близость функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ *в среднем квадратичном*. Используя определение нормы функции, имеем

$$\rho(f,\varphi)=\|f(x)-\varphi(x)\|.$$

Ортогональным многочленом Фурье называется частичная сумма

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x).$$

Если в качестве ортогональной системы функций выбрана основная тригонометрическая система, то многочлен Фурье называется *тригонометрическим* и обозначается $T_n(x)$.

2.2 Неравенство Бесселя

Теорема 1 (об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье) Среди всех обобщенных многочленов вида $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$, $\alpha_k\in\mathbb{R}$, *наилучшей средней квадратичной аппроксимацией функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *является многочлен Фурье, коэффициенты которого находятся по формулам* $\alpha_k=c_k=\dfrac{(f,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$.

Теорема 2 (неравенство Бесселя) Если $f(x)\in L_2[a;b]$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$ *ее обобщенный ряд Фурье по ортогональной системе функций* ($\varphi_n(x)$), *то справедливо неравенство*

$$\int_a^b f^2(x)dx\ge\sum_{k=1}^{n}c_k^2\|\varphi_k\|^2.$$

2.3 Сходимость рядов Фурье

Ряд Фурье называется *сходящимся в среднем квадратичном* к функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если последовательность его частичных сумм ($S_n(x)$) сходится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f(x)-S_n(x))^2 dx=0.$$

Понятие сходимости в среднем квадратичном является обобщением понятия равномерной сходимости.

2.4 Равенство Парсеваля

Теорема 3 Если обобщенный ряд Фурье $\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$ *функции* $f(x)$ *сходится на отрезке* $[a;b]$ *равномерно к функции* $f(x)\in L_2[a;b]$, *то он сходится к* $f(x)$ *на* $[a;b]$ *и в среднем квадратичном.*

Теорема 4 Для того чтобы обобщенный ряд Фурье $\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$ *функции* $f(x)\in L_2[a;b]$ *сходился к* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *в среднем квадратичном необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство Парсеваля – Стеклова:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \int_a^b f^2(x)dx$$.

Ортогональная система функций ($\varphi_k(x)$), для которой выполняется равенство Парсеваля – Стеклова, называется *замкнутой* в $L_2[a;b]$, а само равенство – *уравнением замкнутости*. Из теоремы 4 следует, что любая функция $f(x) \in L_2[a;b]$ может быть разложена в сходящийся к ней в среднем квадратичном ряд Фурье по ортогональной на $[a;b]$ системе функций ($\varphi_k(x)$), если эта система является замкнутой в $L_2[a;b]$.